

## О «МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЛОСОФИИ ЛЕВОГО И ПРАВОГО» (ПО КНИГЕ Г. ВЕЙЛЯ «СИММЕТРИЯ»)

НИКОЛАЙ СТЕШЕНКО

Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Доцент

Контакт: [steshenkon@list.ru](mailto:steshenkon@list.ru)

---

**АННОТАЦИЯ.** В статье излагается спор между Лейбницем и Кларком, в котором речь идет о структуре пространства и ориентации пространства. Анализируется геометрический аргумент И. Канта, который, по его мнению, свидетельствует в пользу того, что пространство и время есть лишь формы чувственного созерцания. Этот аргумент изложен в § 13 Пролегоменов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** Лейбниц, Кант, парадокс, чувственное созерцание, симметрия, левое и правое, преобразование пространства.

## **ABOUT «MATHEMATICAL PHILOSOPHY OF THE LEFT AND RIGHT» (BASED ON THE BOOK BY G. WEYL SYMMETRY)**

NIKOLAY STESHENKO

Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russia)

Associated Professor

Contact: [steshenkon@list.ru](mailto:steshenkon@list.ru)

---

**ABSTRACT.** The article describes the dispute between Leibniz and Clarke, which deals with the structure of space and orientation space.

This article analyzes the I. Kant's geometric argument, which as he believed demonstrates that space and time are the only forms of sensible intuition. This argument is described in § 13 Prolegomena.

**KEY WORDS:** Leibniz, Kant, paradox, sensuous contemplation, symmetry, left and right, transformation of space.

Книга Г. Вейля «Симметрия»<sup>1</sup> является популярной и предназначена широкой аудитории, т.е. тем лицам, которые интересуются состоянием дел в естественных науках и в гуманитарных науках. В этой книге демонстрируется вездесущность симметрии, в неживой и живой природе, искусстве, мифологии, религии, науке. Симметрия была использована и в философии, но не в качестве четкого математического понятия, а в форме проблемы левого и правого.

Всего скорее первые представления о левом и правом зафиксированы в древних мифологиях в качестве одного из главных мифологических противопоставлений, в которых чаще всего левому приписывается отрицательное значение, а правому - положительное<sup>2</sup>. Сам Г. Вейль, в частности, приводит пример религиозного противопоставления правого и левого как символов добра и зла. Он ссылается на 25 главу Евангелия от Матфея, в которой описывается страшный суд следующим образом: «33 И поставит овец по правую Свою сторону, козлов – по левую. 34 Тогда скажет Царь тем, которые по правую сторону Его: «приидите, благословенные Отца Моего, наследуйте Царство, уготованное вам от создания мира...41 Тогда скажет и тем, которые по левую сторону: «идите от Меня, проклятые, в огонь вечный...46 И пойдут сии в муку вечную, а праведники в жизнь вечную».

В своей книге Г. Вейль рассматривает левое и правое как метафору, имевшую культурологические истоки, и применяется им в частности и в обсуждении порядка во взаимном расположении тел в природе и Вселенной.

Являются ли левое и правое полярными противоположностями или это относительные понятия, т. е. одно можно заменить другим?

Г. Вейль называет эту проблему также «математической философией левого и правого»<sup>3</sup>.

В книге рассмотрено на примере Лейбница (спор между Лейбницем и Кларком) и Канта как использовались в философии представления о левом и правом.

В изложении проблемы левого и правого в споре между Лейбницем и священником Кларком я следую за Г. Вейлем. Что касается Канта, я анализирую геометрический аргумент И. Канта, который, по его мнению, свидетельствует в пользу того, что пространство и время есть лишь формы чувственного созерцания. Этот аргумент изложен в § 13 Прологоменов.

Г. Вейль даже не упоминает этого аргумента Канта, но возможно подразумевает его, когда сравнивает подходы Лейбница и Канта к проблеме левого и правого.

---

<sup>1</sup> Вейль Г. Симметрия. Издание второе, стереотипное. М.: УРСС. 2003.

<sup>2</sup> Левый и правый // Мифы народов мира. Энциклопедия. Т.2. М.: Российская энциклопедия. 1997. С. 43-45.

<sup>3</sup> Вейль Г. Симметрия. Издание второе, стереотипное. М.: УРСС. 2003. С. 48.

В упомянутом споре между Лейбницем и Кларком о соотношении левого и правого еще использовались термины теологического языка. Кларк верил в существование абсолютного пространства и времени Ньютона, и полагал, что существующее взаимное расположение тел в пространстве в определенном порядке, а не другом, и направление движения тел, а не противоположном по сравнению с существующим, свидетельствуют о свободной воле бога, который пожелал создать мир таким, а не другим. Лейбниц отвергал абсолютное пространство и время Ньютона. Признавая, что бог сотворил этот мир и что бог обладает свободной волей, отказывался, однако, возлагать на бога решения о порядке расположения тел в мире и направлении их движения, поскольку бог не мог принимать решения без достаточного основания: «Пространство является чем-то совершенно однородным, и, если отвлечься от находящихся в нем вещей, одна его точка абсолютно ничем не отличается от любой другой точки. Следовательно, предполагая, что пространство является чем-то самим по себе, а не только порядком тел между собой, невозможно указать основания для того, почему Бог, сохраняя те же взаимные расположения тел, разместил их в пространстве именно таким образом, а не иначе и почему все не было расположено наоборот, если бы, например, поменяли местами восток и запад. Но если пространство не что иное, как только возможность давать им определенное положение, то именно эти два состояния – первоначальное и обращенное – ни в чем не отличаются друг от друг. Их различие содержится лишь в нашем химерическом предположении реальности пространства самого по себе. В действительности же одно состояние было бы точно таким же, как и другое, ибо они абсолютно неразличимы, и, таким образом, вопрос о том, почему одно состояние предпочитается другому, является неуместным»<sup>4</sup>.

Как отмечает Г. Вейль, современное научное мировоззрение на стороне Лейбница, а не Кларка. Понятие левого и правого относительные понятия. Чтобы указать, что является левым, а что правым, нужен произвольный акт выбора: «Но после того, как этот выбор сделан для одного тела, понятия левого и правого определены для всех тел»<sup>5</sup>. Если бы Бог создал сначала левую руку, а затем правую, или наоборот, сначала правую, а затем левую, наше понимание левого и правого в мире остались бы без изменений. Однако, если бы Бог, например, создал сначала левую руку, а затем, вместо правой руки, создал еще одну левую руку, тогда бы порядок во вселенной изменился, и в этом случае Бог изменил бы порядок, не во время первого акта творения, а во время второго акта творения. Это пример противоположной направленности пространства.

Еще одним примером противоположной направленности пространства является вращение земли вокруг своей оси. Если вращение земли вокруг оси

---

<sup>4</sup> Лейбниц Г. В. Соч.: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль. 1982. С. 442.

<sup>5</sup> Вейль Г. Симметрия. Издание второе, стереотипное. М.: УРСС. 2003. С. 48.

рассматривать в направлении от северного полюса к южному, то земля вращается против часовой стрелки, а если вращение земли рассматривать от южного к северному полюсу, то земля вращается в противоположном направлении, т.е. по часовой стрелке. Привлекая понятие винтового движения, эту же ситуацию с естественным вращением земли вокруг оси описывается следующим образом: на северном полюсе винт выкручивается, тогда, как на южном полюсе винт закручивается. Иначе говоря, понятие левого и правого вращения земли относительные понятия: если смотришь с южного полюса, земля вращается по часовой стрелке, если – с северного против часовой стрелки.

«Направленность пространства» - это точное математическое понятие, но я его не буду вводить, так как оно требует многих технических деталей<sup>6</sup>.

Таким образом, различие между правым и левым зависит от направленности пространства, что интуитивно вполне ясно: если едешь определенным маршрутом движения автобуса от дома на работу, то все предметы находящиеся слева, окажутся предметами находящимися справа, когда возвращаемся домой тем же маршрутом автобуса.

В выше цитированном утверждении Лейбница, а именно: «Пространство является чем-то совершенно однородным, и, если отвлечься от находящихся в нем вещей, одна его точка абсолютно ничем не отличается от любой другой точки»<sup>7</sup> содержится одна из фундаментальных идей (это геометрическая идея), а именно: преобразования пространства, сохраняющего структуру пространства.

Это фундаментальное положение мне понадобится, когда буду рассматривать парадокс Канта, основанный на понятии симметрия.

Это преобразование, которое переводит любые две равные (конгруэнтные) геометрические фигуры в равные. Например, два равных отрезка на плоскости или в пространстве совмещаются. Точно также можно совместить на плоскости любые плоские геометрические фигуры, если они равные, например, два равных треугольника, а в геометрическом пространстве можно совместить, например, два равных куба. Но в физическом пространстве два равных куба взаимозаменяемы.

Объединяя понятие преобразования пространства и понятие направленности пространства можно ввести понятия преобразований сохраняющих или меняющих направленность (ориентацию) фигуры на плоскости или в пространстве. Было бы более правильным ввести эти понятия на основе понятий базиса плоскости или базиса пространства, как это делается в учебниках по геометрии<sup>8</sup>. Но здесь эти понятия будут охарактеризованы

---

<sup>6</sup> См. понятие «левой системы координат», «правой системы координат». Например: Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука.1975. С. 120.

<sup>7</sup> Лейбниц Г. В. Соч.: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль. 1982. С. 442.

<sup>8</sup> Например: Атанасян Л.С., Базылев В. Т. Геометрия. В двух частях. Часть 1. Второе издание, стереотипное М.: КНОРУС. Гл. V, VIII.

чувственно наглядно, в виде примеров, которые использовал И. Кант. Ниже эти примеры будут обсуждаться.

Левая и правая перчатки имеют противоположную пространственную ориентацию (направленность), но если вывернуть наизнанку (т.е. провести пространственное преобразование), скажем левую перчатку, то она поменяет направленность на противоположную, т.е. станет правой перчаткой. Два сферических треугольника с равными сторонами и углами, имеющие общим основанием ту или иную дугу экватора и расположенные в противоположных полушариях имеют противоположную направленность. Можем ли мы провести пространственное преобразование, чтобы совместить один треугольник с другим? Кант полагал, что это невозможно.

Параллельный перенос (разновидность преобразования) треугольника на некоторое расстояние от исходного есть пример преобразования, не меняющего ориентацию (направленность) пространства.

Вторая проблем левое и правое связана с симметрией левого и правого.

Из множества видов симметрии, которые представлены Г. Вейлем в его книге, я рассмотрю два вида симметрии: зеркальная симметрия и центральная симметрия или симметрия относительно точки, и опишу их несколько иначе, чем это сделал Г. Вейль.

Эти два вида симметрии мне также нужны, чтобы обсудить один геометрический парадокс Канта, который он сформулировал в §13 Прологоменов.

Замечу, что я даю не строгие определения упомянутых понятий симметрии, а более или менее точные их описания, так как для строгих определений нужно иметь множество предварительных геометрических понятий, одни из которых являются исходными, т.е. неопределяемыми, а другие требуют определений.

Рассмотрим отрезок АВ, т.е. прямую с концами А и В, на плоскости. Точка А называется симметричной точке В относительно прямой  $\alpha$ , если прямая  $\alpha$  перпендикулярна отрезку АВ и пересекает его в середине (т. е. делит отрезок пополам). В этом случае говорят также, что точка В является зеркальным образом точки А или В является зеркальным отражением точки А. Очевидно, что точка В находится по другую сторону прямой  $\alpha$ . Распространим это определение на геометрическую фигуру в пространстве.

Геометрическая фигура (тело) называется симметричной в пространстве относительно плоскости  $\beta$ , если плоскость разбивает фигуру на две части, каждая из которых является зеркальным отражением другой. Тогда сама плоскость  $\beta$  называется плоскостью симметрии геометрической фигуры.

Зеркальная симметрия весьма распространена в природе и искусстве. Примерами зеркальной симметрии в природе являются само человеческое тело,

формы тел многих животных и птиц, поскольку относительно них можно указать плоскость симметрии.

Точки  $A$  и  $B$  называются симметричными относительно центра симметрии  $O$ , если отрезок, соединяющий точки  $A$  и  $B$ , делится точкой  $O$  пополам. Геометрическая фигура называется симметричной относительно центра  $O$ , если все его точки распределяются на пары точек, симметричные относительно центра  $O$ .

Примерами фигур центральной симметрии на плоскости является квадрат и окружность. Так, центром  $O$  квадрата является точка пересечения диагоналей квадрата. Примерами центрально симметричных фигур в пространстве являются куб и шар, центры, которых и являются центрами симметрии.

Перейду к И. Канту. Вейль Г. полагал, что «размышляя над проблемой левого и правого, Кант впервые пришел к своей концепции пространства и времени как форм интуиции»<sup>9</sup>. Здесь значение термина «интуиция» совпадает со значением термина «созерцание»<sup>10</sup>.

Действительно ли такие размышления Канта привели его к концепции пространства и времени, как априорных форм созерцания или нет, на этот вопрос могут дать ответ историки философии.

Но сначала приведу упоминание о парадоксе: «Те, кто не может еще отказаться от представления, будто пространство и время суть действительные свойства вещей самих по себе, пусть изошряют свою проницательность на приводимом ниже парадоксе, и если их попытки разрешить его будут тщетными, то пусть, избавившись, хотя бы на несколько мгновений, от предрассудков, признают, что сведение пространства и времени к одним лишь формам нашего чувственного созерцания, может быть, и имеет основание»<sup>11</sup>.

Этот парадокс, по мнению Канта, свидетельствуют в пользу того, что пространство и время являются формами чувственного созерцания, а не свойствами вещей самих по себе.

То, что Кант называет парадоксом, по содержанию относится к геометрии и формулируется в виде примеров. Эти примеры даны Кантом в §13 Прологоменов. Речь идет о любых плоских и сферических геометрических

---

<sup>9</sup> Вейль Г. Симметрия. Издание второе, стереотипное. М.: УРСС. 2003. С. 52

<sup>10</sup> Как отмечает Лосский Н.О. в своем переводе «Критики чистого разума», изданной еще в 1907 г., слово *Anschauung* в российской философской литературе переводилось по разному: «воззрение», «созерцание», «интуиция». Сам Лосский переводит *Anschauung* как «наглядное представление». См.: Кант. И. Критика чистого разума. Перевод с немецкого Н.О. Лосского (печатается по изданию: С.- Пб, 1907 г.). С.- Петербург. 1993. С. 8.

<sup>11</sup> Кант И. Прологомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука // Кант И. Соч.: В 6 т. Т. 4. Ч. 1. М.: Мысль. 1965. С. 101.

фигурах, но в качестве конкретного примера этих фигур Кант рассматриваются треугольники. По его мнению, невозможно совместить посредством преобразования пространства два равных (т.е. конгруэнтных) сферических треугольника (расположенных в противоположных полушариях шара) тогда как плоские треугольники, если они равные, совместимы. Кант приводит и варианты проблемы совместимости из повседневной жизни: это отображение человека в зеркале, когда левая рука (ухо, глаз) человека в зеркале изображается как правая, а правая рука (ухо, глаз) человека – как левая; перчатка одной руки не подходит для другой; правозакрученные и левозакрученные раковины улиток одного и того же вида.

Замечу, что Г. Вейль не обсуждает и даже не упоминает этого парадокса, но возможно подразумевает. Я предлагаю реконструкцию геометрического аргумента, который, по мнению Канта, свидетельствует в пользу того, что пространство и время являются формами чувственного созерцания, а не свойствами вещей самих по себе.

Отмечу предварительно, что в понимании Канта пространство есть форма всех явлений внешних чувств, т.е. субъективное условие чувственности. Для Канта суждение типа «вот эта вещи находятся справа от той вещи» или «вот эта вещь находится ближе той» имеет силу, когда эти вещи рассматриваются как предметы нашего чувственного созерцания.

Для дальнейшего обсуждения позиции Канта по проблеме левого и правого зафиксируем несколько базовых для анализа кантовского аргумента положений.

*Положение А:* «...все внешние предметы нашего чувственного воспринимаемого мира необходимо должны со всей точностью согласовываться с положениями геометрии...»<sup>12</sup>.

Кант использовал понятие преобразования, совмещающее две равные фигуры. Зафиксируем это.

*Положение В:* «Все доказательства полного равенства двух данных фигур (когда одна во всех частях может занять место другой) сводится в итоге к тому, что они совпадают друг с другом; а это ...синтетическое положение, основанное на непосредственном созерцании»<sup>13</sup>.

Но это положение, по Канту, относится только к фигурам плоскости (квадрат, ромб, и т. д.), но не к сферическим фигурам (и некоторым пространственным). Речь идет о сферической геометрии, которая изучает свойства фигур, лежащих на сфере евклидоваго пространств.

В частности, по Канту, два сферических треугольника, равные и сторонами и углами, имеющие общим основанием ту или иную дугу экватора и

---

<sup>12</sup> Там же. С. 104.

<sup>13</sup> Там же. С. 100.



расположенные в противоположных полушариях не могут быть совмещены<sup>14</sup>. Почему? Проанализируем рассуждение Канта.

1. «Если две вещи во всех отношениях, которые только могут быть познаны каждое в отдельности (во всех определениях величины и качества), совершенно одинаковы, *то отсюда должно следовать*, что во всех случаях и отношениях одна из этих вещей может быть замещена другой, так что замена не вызовет никакого заметного различия. Так действительно обстоит дело с плоскими фигурами в геометрии»<sup>15</sup>.

Два сферических треугольника, удовлетворяют условиям посылки пункта 1, так как эти сферические треугольники имеют равные стороны и углы, но нельзя, по Канту, сделать заключения, что один может быть замещен другим. Согласно *положению В*, это замещение возможно, если в созерцании, т.е. через внешнее отношение в пространстве, продемонстрируем их полное совпадение.

Используя ранее введенное понятие преобразования и преобразований, сохраняющих или меняющих направленность (ориентацию) плоскости или пространства, заключение невозможно, если неосуществимы такие преобразование одного сферического треугольника в другой, чтобы они полностью совпали во всех своих частях. Хотя понятия преобразования, направленность (ориентация) пространства появились позже, после жизни Канта, но употребляя понятия «равенства двух фигур», «замещение одной фигуры другой» он неявно использовал понятием преобразования.

Тогда почему невозможны такие преобразования, чтобы два равных сферических треугольника, один из которых находится в нижнем полушарии, а второй в верхнем полностью совпали?

На основе указанных понятий можно преобразованием перевести сферический треугольник из нижнего полушария, где бы он не находился, в верхнее полушарие, поменяв ориентацию треугольника, затем поворотом вокруг оси шара на нужный угол, совместить их. Эти преобразования также реализуемо на материальной модели, например, медном шаре. Но согласно Канту «...все внешние предметы нашего чувственного воспринимаемого мира необходимо должны со всей точностью согласовываться с положениями геометрии...», тогда либо геометрические взгляды Канта отвергали некоторые преобразования фигур сферы, либо они были ему неизвестны. На эти два предположения ответ может дать историк философии и науки, если источники позволяют выяснить с какой геометрической литературой был знаком И. Кант.

Рассмотрю второй пример Канта: «перчатка одной руки не годится для другой». Если поменять пространственную ориентацию перчатки, например левой, т.е. вывернуть ее наизнанку, тогда левая перчатка годится и для правой

---

<sup>14</sup> См.: там же. С. 101- 102.

<sup>15</sup> Там же. С.101.

руки, т.е. становится правой перчаткой. Другими словами, здесь Кант не учитывает преобразование, меняющее направленность (ориентацию) фигуры в пространстве.

Третий пример: отображение человека в зеркале, когда левая рука (левая часть) человека в зеркале изображается как правая рука (правая часть), а правая рука (правая часть) человека изображается в зеркале как левая рука (левая часть). С геометрической точки зрения зеркало является плоскостью симметрии, на этой плоскости можно отыскать центр симметрии  $O$ , поворот вокруг которого на  $180$  градусов образа (изображение в зеркале) совместит его с прообразом (человеком перед зеркалом). Но в физическом мире, это нереализуемо. Преобразования, при которых фигура совмещается с самой собой (т.е. симметричные преобразования) есть частный случай преобразования, при которых совмещаются однотипные фигуры, например, два сферических треугольника.

Заметим, что в двух предыдущих примерах - сферический треугольник и перчатка - геометрические преобразования допускали реализацию в физическом мире.

Наконец последний пример, приводимый Кантом: правозакрученные и левозакрученные раковины улиток одного и того же вида. Этот пример свидетельствует о том, что в физическом мире были реализованы по отдельности тела, имеющие противоположную направленность в пространстве. Можно также показать посредством геометрических преобразований, что одно из них переходит в другое и наоборот.

*Подведу итоги.* То, что Кант называл парадоксом, не является парадоксом, так как имеет вполне рациональное объяснение. Во-первых, Кант, скорее всего, не соглашался с тем, что левое и правое есть относительные понятия, так не учитывает преобразование, меняющее направленность (ориентацию) фигуры в пространстве. Во-вторых, есть несовпадение между геометрически осуществимыми всевозможными видами преобразований фигур и теми видами преобразования фигур, которых не могут реализоваться, осуществятся в чувственных созерцаниях, т.е. не имеют чувственно наглядной реализации. Так, правозакрученная и левозакрученная раковины с точки зрения геометрии являются противоположными по направленности в пространстве симметричными фигурами, преобразуемыми друг в друга, но в эмпирическом созерцании преобразование одной раковины в другую неосуществимо. Иначе, геометрия допускает большее число преобразований геометрических фигур, чем преобразований допустимых в эмпирическом созерцании. Но Кант считает это несовпадение и непризнание относительности левого и правого парадоксом.

## REFERENCES

- Veil G. Simmetria [The Symmetry]. – Moscow, 2003. S. 192. (In Russian)
- Kant I. Kritika chistogo razuma [The Critic of Pure Reason]. – Saint-Petersburg, 1993. S. 498. (In Russian)
- Kant I. Prolegomeny ko vsjakoy budushej metafizike, mogutscheij pojavitsa kak nauka [Prolegomena to any Future Metaphysics] In: Kant I. *Sochinenia*. 1965. T. 4. Ch. 1. – Moscow, 1965. S. 544.
- Leibniz G.V. *Sochinenia v 4 tomah*. [Works]. T. 1. – Moscow, 1982. S. 636.